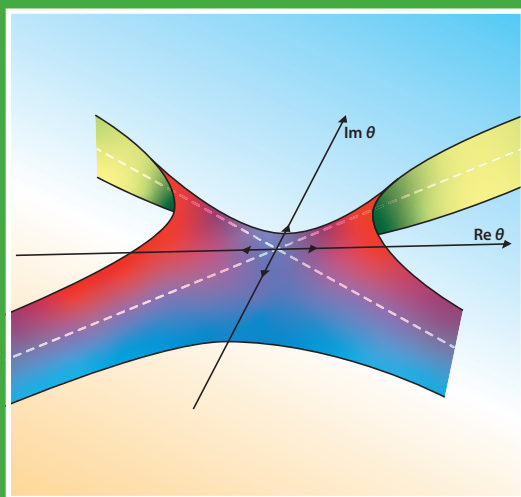


ANALYSE COMPLEXE ET MÉTHODES NUMÉRIQUES



JEAN ZINN-JUSTIN

ANALYSE COMPLEXE ET MÉTHODES NUMÉRIQUES

JEAN ZINN-JUSTIN

En physique, de nombreuses observables sont calculées sous forme de séries entières. Quand ces séries sont faiblement convergentes, ou même divergentes (comme celles engendrées par la méthode du col), il est nécessaire de trouver des algorithmes d'accélération de convergence. Ces algorithmes sont largement contraints par les propriétés d'analyticité des quantités calculées. Une application contemporaine a été la détermination des exposants critiques des transitions de phase.

Dans cet ouvrage, les bases de l'analyse complexe sont d'abord rappelées, et un certain nombre d'algorithmes d'accélération de convergence d'utilisation récente sont ensuite décrits.

Jean Zinn-Justin, membre de l'Académie des sciences, est un spécialiste de la théorie quantique des champs, avec ses applications à la physique des particules et aux transitions de phase macroscopiques.

Série Physique dirigée par Michèle LEDUC et Michel LE BELLAC

SAVOIRS ACTUELS

Collection dirigée par Michèle LEDUC

CNRS EDITIONS

www.cnrseditions.fr



edp sciences
www.edpsciences.org

Création graphique : Béatrice Couëdel



ISBN EDP Sciences 978-2-7598-3698-7
ISBN CNRS ÉDITIONS 978-2-271-15453-8

Ces ouvrages, écrits par des chercheurs, reflètent des enseignements dispensés dans le cadre de la formation à la recherche. Ils s'adressent donc aux étudiants avancés, aux chercheurs désireux de perfectionner leurs connaissances ainsi qu'à tout lecteur passionné par la science contemporaine.

Jean Zinn-Justin

Analyse complexe
et méthodes numériques

S A V O I R S A C T U E L S

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

Dans la même collection

Symétries continues, 2^e édition, révisée et augmentée
Franck Laloë

La diffraction des rayons X par les cristaux liquides – Tomes 1 et 2
Anne-Marie Levelut, Patrick Davidson et Alan Braslau

Imager l'invisible avec la lumière – Comment l'optique moderne révolutionne l'imagerie du vivant
Cathie Ventalon et Sylvain Gigan

Groupes de symétrie en physique – Brisure spontanée et transitions de phase
Jean Zinn-Justin

Théorie statistique des champs – Tomes 1 et 2
François David

Physique quantique, information et calcul – Des concepts aux applications
Pascal Degiovanni, Natacha Portier, Clément Cabart, Alexandre Feller et Benjamin Roussel

Physique de la turbulence – Des tourbillons aux ondes
Sébastien Galtier

Mécanique quantique – Tomes I, II et III
Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu et Franck Laloë

Retrouvez tous nos ouvrages et nos collections sur
<http://laboutique.edpsciences.fr>

Imprimé en France

© 2025, EDP Sciences, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf,
91944 Les Ulis Cedex A
et
CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

ISBN EDP Sciences 978-2-7598-3698-7 (papier) – 978-2-7598-3699-4 (ebook)
ISBN CNRS Éditions 978-2-271-15453-8 (papier) – 978-2-271-15454-5 (ebook)

Table des matières

1	Intégrales de contour ou curvilignes dans le plan	1
1.1	Préliminaires	1
1.2	Champs de vecteurs du plan et intégrales de contour	4
1.3	Propriétés des champs de gradient	5
1.4	Courbure du champ de vecteurs. Identité de Green–Riemann	7
1.5	Condition de courbure nulle	10
1.6	Champs de vecteurs différentiables et condition de courbure nulle	12
1.7	Particule dans un champ magnétique et identité de Green–Riemann	15
	Exercices	17
2	Intégrales complexes. Fonctions holomorphes	21
2.1	Intégrale de contour complexe	22
2.2	Fonctions holomorphes	23
2.3	Fonctions entières	27
2.4	Représentation de Cauchy	28
2.5	Théorème de Morera	31
2.6	Formule de la moyenne. Théorème du module maximum	32
2.7	Fonctions entières bornées	33
2.8	Illustration en physique : fluides bidimensionnels	35
3	Séries de Taylor	37
3.1	Préliminaires	37
3.2	Représentation de Cauchy et série de Taylor	38
3.3	Séries de Taylor et analyticité	40
3.4	Quelques conséquences	41
4	Singularités isolées. Formule des résidus	45
4.1	Fonctions méromorphes	45
4.2	Formule des résidus	46
4.3	Inversion et sphère de Riemann	47
4.4	Théorème de d’Alembert	48
4.5	Singularités essentielles isolées	50
4.6	Séries de Laurent	52
	Exercices	53
5	Singularités algébriques. Transformations conformes	55
5.1	Logarithme complexe	55
5.2	La fonction z^α	57
5.3	Formule de Lagrange	58
5.4	Transformations conformes	59
5.5	Conditions de Cauchy et électrostatique bidimensionnelle	61
6	Sujets divers	63
6.1	La fonction $\Gamma(z)$	63
6.2	Distributions gaussiennes	68

Exercices	73
7 Séries asymptotiques. Méthode du col	77
7.1 Fonctions analytiques bornées dans un secteur	77
7.2 Séries asymptotiques	78
7.3 Méthode du col	80
7.4 Comportement aux grands ordres	84
7.5 Transformation de Borel	86
8 Approximants de Padé : définition et propriétés	89
8.1 Propriétés de transformation : cas général	90
8.2 Approximants de Padé diagonaux	91
8.3 Autres relations entre approximants	92
8.4 Convergence en mesure	93
9 Fractions continues	95
9.1 Définition et propriétés algébriques	95
9.2 Fonctions : développement en fractions continues	98
9.3 Équations de Riccati et fractions continues	99
9.4 Deux exemples	101
Exercices	105
10 Approximants de Padé et fractions continues	107
10.1 Approximants de Padé et fractions continues	107
10.2 Numérateurs et dénominateurs des approximants de Padé	108
10.3 Approximants de Padé diagonaux	110
10.4 Fonctions et inverses	111
10.5 Approximants de Padé	113
10.6 Identité de Wynn	115
10.7 Approximants de Padé multi-points	117
10.8 Séries à coefficients matriciels	119
11 Propriétés de Herglotz et fonctions de Stieltjes	121
11.1 Propriété de Herglotz : définition et conséquences	121
11.2 Une deuxième propriété de Herglotz	123
11.3 Fonctions de Stieltjes	125
11.4 Polynômes orthogonaux et quadrature gaussienne	129
11.5 Approximants de Padé multi-points	132
11.6 Matrices de Stieltjes	134
12 Méthodes d'accélération de convergence	139
12.1 Intégration et formule d'Euler–MacLaurin	139
12.2 Extrapolation de suites	144
12.3 Approximants à trois points et racines complexes d'équations	150
13 Spectre d'opérateurs différentiels. Exemples	153
13.1 Équation de Schrödinger	153
13.2 Équations de champ : solutions de type instanton	155
14 Séries divergentes et sommation	157
14.1 Séries asymptotiques dans un secteur	157
14.2 Sommation de Borel	158
14.3 Application au calcul des exposants critiques	161
14.4 Méthode ODM de sommation de séries	163

Appendices.	167
A1 Quelques autres résultats mathématiques	167
A1.1 Lemme de Goursat	167
A1.2 Théorème de Carlson	167
A1.3 Principe de Phragmén–Lindelöf pour un secteur angulaire	168
A2 Fractions continues et approximations de Padé	169
A2.1 Fractions continues et approximations de Padé	169
A2.2 Les polynômes $\Theta_p(s)$: relations de récurrence	170
A2.3 Troncation et sommation : démonstration alternative	172
A2.4 Identité de Wynn : vérification	174
Index	175

Introduction

Cet ouvrage a pour origine le cours d'introduction à la théorie des *fonctions analytiques* donné dans le cadre de la licence de physique à partir du premier semestre de l'année universitaire 1999–2000. Il n'a nullement l'intention de concurrencer les nombreux ouvrages traitant de ce sujet, mais simplement de rappeler quelques éléments essentiels de la théorie des fonctions analytiques, en les replaçant dans un contexte de physique, pour ensuite décrire certaines techniques numériques où les propriétés d'analyticité jouent un rôle important, et qui ont trouvé des applications dans la physique moderne.

Le premier chapitre est dédié à des remarques générales sur les intégrales de contour et champs de vecteurs dans le plan, en préparation pour l'étude des fonctions analytiques qui suit.

Le chapitre 2 contient une introduction élémentaire à la théorie des fonctions analytiques.

Le chapitre 3 introduit les séries de Taylor et la représentation de Cauchy. Le chapitre 4 introduit la notion de singularités isolées et l'application à la formule des résidus.

Le chapitre 5 contient une discussion des certaines singularités algébriques.

Le chapitre 6 tente d'illustrer les chapitres précédents par le calcul de certaines intégrales classiques. En particulier, cela nous permet de définir la fonction Γ et de discuter des propriétés des mesures gaussiennes.

Le chapitre 7 contient une discussion de sujets plus spécialisés et peut-être moins standards.

Nous introduisons une classe de séries de Taylor divergentes et discutons de leur sommabilité. Ces séries divergentes apparaissent, en particulier, dans le calcul d'intégrales complexes par une méthode appelée méthode du col, que nous décrivons.

Quand cela paraît simple et utile, nous illustrons ces sujets par des applications en physique.

Les chapitres 8-10 sont dédiés aux approximants de Padé et à un sujet intimement lié : les fractions continues. Les approximants de Padé sont d'usage courant en physique dans la mesure où de nombreuses quantités sont obtenues sous forme de séries faiblement convergentes (ou même divergentes). Une partie de ces chapitres est issue de l'appendice de ma thèse, qui utilise des approximants de Padé, et d'exposés reliés. Nous discutons de façon plus détaillée des propriétés algébriques que des propriétés de convergence. Quelques exemples illustrent ces méthodes.

Nous décrivons d'abord les approximants de Padé dans le cas de fonctions analytiques, puis deux types de généralisations : les approximants multi-points et les approximants pour séries avec coefficients matriciels.

Dans le chapitre 11, nous définissons les conditions de Herglotz et des fonctions de Stieljes dont nous discutons des propriétés. Nous mettons en évidence leur relation avec les fractions continues à coefficients positifs.

Les dénominateurs des approximants de Padé correspondants engendrent des polynômes orthogonaux et sont reliés à la méthode d'intégration numérique gaussienne. Nous généralisons certaines propriétés aux approximants de Padé multi-points et matriciels.

Les chapitres 12-13 sont des chapitres applicatifs numériques, introduisant des méthodes où l'analyticité joue un rôle important. Ces méthodes sont illustrées par des exemples explicites. Les sujets abordés sont l'intégration numérique, l'accélération de convergence de suites, la solution d'équations numériques dans le plan complexe, ou de certaines équations différentielles. Ainsi nous considérons la détermination du spectre d'équations de Schrödinger et une équation de Schrödinger non linéaire dont la solution permet la détermination du comportement aux grands ordres du développement perturbatif d'une théorie quantique des champs.

Le chapitre 14 est dédié aux séries divergentes et, quand c'est possible, à leur sommation. En particulier, nous introduisons la notion de sommabilité au sens de Borel et la transformation de Borel.

Les méthodes numériques décrites dans les chapitres 12-14 ont été utilisées, en particulier, pour la détermination des exposants critiques, et d'autres quantités universelles, dans des transitions de phase continues.

Enfin, nous décrivons une méthode originale de sommation de séries divergentes, la méthode ODM (en anglais *order-dependent mapping*), qui est basée sur des transformations conformes dépendantes de l'ordre.

Bibliographie

- [1] J. Zinn-Justin, R. Guida, *Gauge invariance*, Scholarpedia, 3(12):8287.
- [2] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B (1984) 333.
- [3] D. Poland, S. Rychkov, A. Vichi, *The conformal bootstrap: Theory, numerical techniques, and applications*, Rev. Mod. Phys. 91 (2019) 015002-1.
- [4] J. Zinn-Justin, *Intégrale de chemin en mécanique quantique : introduction*, EDP Sciences et CNRS Editions, Les Ulis 2003.
- [5] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Univ. Press, 5^{ème} édition (2021).
- [6] G.A. Baker, P. Graves-Morris, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vols. 13 and 14, Gian-Carlo Rota ed. (Addison-Wesley, New York 1981).
- [7] C. Brezinski, *History of continued fractions and Padé approximants*, Springer Science & Business Media (2012).
- [8] J. Zinn-Justin, *Convergence of Padé approximants in the general case*, Colloquium on Advanced Computing Methods in Theoretical Physics, Marseille 1971; Rocky Mountain J. Math. 4 (1974) 325-329;
Recent developments in the theory of Padé approximants, Colloquium on Advanced Computing Methods in Theoretical Physics, Marseille 1973.
- [9] J. Nuttall, *The convergence of Padé approximants of meromorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. 31 (1970) 147-153.
- [10] G. Polya, G. Szegö, *Isoperimetric inequalities in Math. Phys.*, Annals of Math. Studies n°27, Princeton Univ. Press (1951).
- [11] J. Zinn-Justin, *Strong interactions dynamics with Padé approximants*, thèse de doctorat (Univ. Orsay 1968) ; ibidem Phys. Rep. 1C (1971) 55-102, p. 70.
- [12] J.L. Basdevant, D. Bessis, J. Zinn-Justin, *Padé Approximants in Strong Interactions. Two-Body Pion and Kaon Systems*, Il Nuovo Cimento, vol. LX A (1969) 1985.
- [13] M.F. Barnsley, *The bounding properties of the multipoint Padé approximant to a series of Stieltjes on the real line*, J. Math. Phys. 14 (1973) 299-313.
- [14] J. Zinn-Justin, *Analysis of Ising model critical exponents from high temperature series expansion*, J. Physique 40 (1979) 969 ; *Analysis of high temperature series of the spin S Ising model on the body-centred cubic lattice*,

- J. Physique 42 (1981) 783 ¹
- [15] M. Campostrini, A. Pelissetto, P. Rossi, E. Vicari, *25th-order high-temperature expansion results for three-dimensional Ising-like systems on the simple-cubic lattice*, Phys. Rev. E 65 (2002) 066127.
- [16] J. Zinn-Justin, *Transitions de phase et groupe de renormalisation*, EDP Sciences et CNRS Éditions, Les Ulis 2005.
- [17] J. Zinn-Justin, *The principle of instanton calculus : a few applications*, Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics, école d'été de physique théorique, session XXXIX, Les Houches, France, Aug.2 - Sept.10, 1982 (J. Zuber, R. Stora eds., North-Holland, 1984, pp. 41-172.)
- [18] L.N. Lipatov, *Divergence of the perturbation-theory series and the quasi-classical theory*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 72 (1977) 411-427.
- [19] E. Brézin, J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *Perturbation theory at large order. I. The φ^{2N} interaction*, Phys. Rev. D15 (1977) 1544.
- [20] E. Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*, Annales scientifiques de l'ENS 3^{ième} série, tome 16 (1899), p. 9-131 ; *Leçon sur les séries divergentes*, 2^{ième} édition Gauthier-Villars (Paris 1928).
- [21] G.H. Hardy, *Divergent series*. Oxford Clarendon Press (1949).
- [22] J.P. Ramis, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Panoramas et synthèses, Société mathématique de France (1993).
- [23] J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *Critical exponents from field theory*, Phys. Rev. B21 (1980) 3976 ; *Accurate critical exponents for Ising like systems in non-integer dimensions*, J. Physique 48 (1987) 19.
- [24] K.G. Wilson, M.E. Fisher, *Critical Exponents in 3.99 Dimensions*, Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 240.
- [25] R. Guida, J. Zinn-Justin, *Critical exponents of the N-vector model*, J. Phys. A31 (1998) 8103.
- [26] M.K. Kompaniets, E. Panzer, *Minimally subtracted six-loop renormalization of $O(n)$ -symmetric ϕ^4 theory and critical exponents*, Phys. Rev. D96 (2017) 036016.
- [27] R. Seznec, J. Zinn-Justin, *Summation of divergent series by order dependent mappings : Application to the anharmonic oscillator and critical exponents in field theory*, J. Math. Phys. 20 (1979) 1398.
- [28] J. Zinn-Justin, *Summation of divergent series: Order-dependent mapping*, Applied Numerical Mathematics, 60 (2010) 1454.
- [29] J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *The hydrogen atom in strong magnetic fields: summation of the weak field series expansion*, Ann. Phys. (NY) 147

¹ Il y a une coquille dans l'équation 11 de cette deuxième référence, où χ_n/χ_{n-4} doit probablement être remplacé par $\chi_n\chi_{n-1}/\chi_{n-2}\chi_{n-3}$.

(1983) 57.

- [30] U. D. Jentschura, J. Zinn-Justin, *Imaginary cubic perturbation: numerical and analytic study*, J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 425301.
- [31] M. Froissart, *Froissart bound*, Scholarpedia, 5(5):10353 (2010).

Chapitre 1

Intégrales de contour ou curvilignes dans le plan

Dans ce chapitre, nous listons quelques définitions et introduisons les notions de contours et intégrales de contour. Nous illustrons ces notions dans le cadre du magnétisme dans le plan.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Quelques définitions

Notation. Nous utiliserons partout dans ce livre la notation internationale plutôt que la notation française pour les fonctions hyperboliques.

Fonctions différentiables. Soit D un ouvert du plan \mathbb{R}^2 , et soit f une fonction définie dans D à valeurs réelles ou complexes.

Définition. Une fonction f est *différentiable* au point $\{x_1, x_2\}$ dans D si

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} h_2 + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right),$$

où la notation $o(x)$ signifie $o(x)/x \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow 0$.

Remarque importante. L'existence de dérivées partielles à un point $\{x_1, x_2\}$ ne suffit pas à assurer la différentiabilité en ce point. Par exemple, la fonction

$$f(x_1, x_2) = x_1 \epsilon(x_2), \text{ avec } \begin{cases} \epsilon(x) = 1 & \text{pour } x > 0 \\ \epsilon(x) = 0 & \text{pour } x = 0 \\ \epsilon(x) = -1 & \text{pour } x < 0, \end{cases}$$

a deux dérivées partielles au point $x_1 = x_2 = 0$,

$$f(x_1, 0) = 0, \quad \frac{\partial f(x_1, 0)}{\partial x_1} = 0, \quad f(0, x_2) = 0, \quad \frac{\partial f(0, x_2)}{\partial x_2} = 0,$$

mais n'est pas différentiable en ce point. Choisissons en effet $h_1 = h_2 = h > 0$. Alors,

$$f(h, h) - f(0, 0) - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1} h - \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_2} h = f(h, h) = h,$$

une quantité qui ne s'annule pas plus vite que h quand h tend vers zéro.

Par contre, si f possède des dérivées partielles en tout point suffisamment voisin de $\{x_1, x_2\}$ et que ces dérivées partielles sont continues en $\{x_1, x_2\}$ alors f est différentiable en ce point. Enfin, une fonction qui admet des dérivées partielles continues dans un ouvert D (et qui est donc différentiable en tout point) est dite *continûment différentiable* dans D .

Définition. Un domaine ouvert D est *connexe* si l'égalité $D = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 ouverts disjoints, entraîne que \mathcal{O}_1 ou \mathcal{O}_2 est vide.

Définition. Un domaine D du plan est *simplement connexe* si toute courbe continue fermée peut, par déformation continue, être réduite à un point appartenant à D .

Cette propriété d'un domaine ouvert D du plan jouera un rôle important par la suite.

1.1.2 Contours : définition

Dans cette section, nous définissons les notions de contour puis d'intégrale de contour. Nous discutons ensuite les notions d'indépendance de contour des intégrales et de courbure d'un champ de vecteurs. Dans ce but nous rappelons d'abord quelques notions importantes.

Nous introduisons dans cette section la notion d'intégrale de contour. Il est donc nécessaire de définir d'abord la classe de contours ou chemins que nous utiliserons. En fait, ils correspondent à la notion intuitive d'arcs de courbe *orientés* sans points doubles. Un chemin différentiable C du plan est une application continue d'un intervalle fermé $[a, b]$ dans le plan \mathbb{R}^2 ,

$$s \mapsto \mathbf{x}(s), \quad \mathbf{x}(s) \equiv \{x_1(s), x_2(s)\},$$

telle que les coordonnées cartésiennes $(x_1(s), x_2(s))$ soient des fonctions continûment dérivables de s (à dérivées continues).

Par convention, nous choisissons des chemins orientés dans le sens des valeurs croissantes du paramètre s : $\mathbf{x}(a)$ est alors appelé origine et $\mathbf{x}(b)$ extrémité, et sans points doubles. Un contour est *fermé* si l'origine et l'extrémité coïncident.

1.1.3 Changement de paramétrisation

Soit une fonction continûment dérivable $s(t)$, $t \in [c, d]$ ($c < d$), telle que

$$t(c) = a, \quad t(d) = b, \quad \text{avec} \quad s'(t) > 0 \quad \forall t.$$

L'application composée de $t \mapsto s(t)$ et $s \mapsto x(s)$,

$$t \mapsto x(s(t)),$$

définit un autre chemin différentiable, correspondant au même ensemble de points du plan. Ces chemins sont reliés par changement de paramétrisation. Ils forment une classe d'équivalence. En effet, un chemin est équivalent à lui-même par $s \equiv t$. La propriété est symétrique car $t(s)$ est également continûment dérivable puisque $t'(s) = 1/s'(t) > 0$. Enfin, on vérifie qu'elle est transitive en faisant deux changements de paramétrisation successifs.

Enfin, un changement tel que $s'(t) < 0 \forall t$ inverse l'orientation du chemin.

Exemple. Une ellipse peut être paramétrée par

$$x_1 = R_1 \cos s, \quad x_2 = R_2 \sin s, \quad s \in [-\pi, +\pi],$$

et correspond à un chemin différentiable puisque les fonctions $\cos s$ et $\sin s$ sont continûment dérivables. Le changement de paramétrisation

$$s = 2 \arctan t \Rightarrow t = \tan(s/2),$$

est un changement de paramètres de la classe définie ci-dessus pour tout intervalle fermé $t \in [c, d]$ puisque

$$s'(t) = \frac{2}{1+t^2},$$

est une fonction continue et positive. Notons que les valeurs $s = \pm\pi$ sont exclues.

Chemin différentiable par morceaux. On appelle chemin différentiable par morceaux une application *continue* d'un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} dans le plan \mathbb{R}^2 ,

$$s \in [a, b] \text{ (avec } a < b) \mapsto \mathbf{x}(s) \text{ avec } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

telle qu'il existe une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ en un nombre *fini* d'intervalles partiels de façon que les restrictions de l'application à tous les sous-intervalles soient continûment dérivables. Géométriquement cela implique que la courbe correspondante admet une tangente sauf en un nombre fini de points.

Ce que nous appellerons *contour* par la suite est une classe d'équivalence de chemins différentiables par morceaux.

1.1.4 Intégrales de contour

Nous considérons des intégrales de contour définies de la façon suivante : une intégrale de contour est une intégrale le long d'un chemin différentiable par morceaux qui dépend du contour, mais pas de sa paramétrisation. Un exemple simple permet d'illustrer cette notion.

La longueur d'une courbe est donnée par une intégrale de contour. Soit en effet un chemin différentiable $\mathbf{x}(s) \equiv \{x_1(s), x_2(s)\}$. La longueur du vecteur dérivée $|\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}s|$ dont le carré est donné par

$$\left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} \right|^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s} \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} \right)^2,$$

est une fonction positive continue. La longueur L de la courbe qui va du point $\mathbf{x}(a)$ au point $\mathbf{x}(b)$ est donnée par

$$L = \int_a^b \mathrm{d}s \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} \right| < \infty. \quad (1.1)$$

L'intégrale existe parce que l'intégrand est une fonction continue et l'intervalle d'intégration est fini. Par ailleurs, dans un changement de paramétrisation $s \mapsto t$ de la classe définie dans la section 1.1.3, on trouve (dérivée en chaîne)

$$\frac{dx_\mu(s)}{ds} = \frac{dx_\mu(s(t))}{dt} \frac{dt}{ds} \Rightarrow \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right|^2 = \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2,$$

et

$$L = \int_{t(a)}^{t(b)} dt \frac{ds}{dt} \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| = \int_c^d dt \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|,$$

où nous avons utilisé explicitement la condition $ds/dt = 1/(dt/ds) > 0$.

Nous avons donc vérifié que, comme attendu, la longueur d'un arc de courbe ne dépend pas de la paramétrisation choisie. De plus, avec notre définition, tout contour a une longueur finie L . Pour un chemin différentiable par morceaux, l'argument s'applique à chaque sous-intervalle et le nombre de sous-intervalles est fini. La longueur totale est la somme des longueurs partielles.

1.2 Champs de vecteurs du plan et intégrales de contour

Soit l'ensemble de vecteurs réels $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \{A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{x})\}$, $\mathbf{x} \equiv \{x_1, x_2\}$, à deux composantes, fonctions continues dans un ouvert connexe D du plan. Nous appelons un tel ensemble de vecteurs *champ de vecteurs*, ou champ vectoriel.

Nous considérons un contour différentiable $\mathbf{x}(s) \equiv \{x_1(s), x_2(s)\}$, $s \in [a, b]$ appartenant à la classe définie dans la section 1.1.2. Nous définissons alors l'intégrale de contour sur un vecteur \mathbf{A} appartenant à l'ensemble par

$$I_C = \int_a^b ds \mathbf{A}(\mathbf{x}(s)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \quad (1.2)$$

où nous notons par $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ le produit scalaire $\sum_{\mu=1,2} A_\mu dx_\mu$.

Dans un changement de paramétrisation $s \mapsto t$, la forme de l'intégrale ne change pas en vertu de l'identité (dérivée en chaîne)

$$dt \frac{d\mathbf{x}(s(t))}{dt} = dt \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = ds \frac{d\mathbf{x}}{ds}.$$

L'intégrale I_C ne dépend donc que du contour géométrique C , et non de la paramétrisation choisie. Nous l'appellerons donc intégrale de contour et nous utiliserons la notation

$$I_C = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.3)$$

sans référence à une paramétrisation explicite.

Invariance par rotation. Les produits scalaires dans les intégrales (1.2, 1.3) montre que l'intégrale reste invariante dans des rotations identiques des vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{x} .

Convention. Sans perte de généralité, nous choisirons par la suite en général $a = 0, b = 1$, sauf quand nous serons amenés à faire tendre a ou b vers l'infini. En effet, il est toujours possible de se ramener à cette situation par le changement de paramétrisation $s \mapsto t$,

$$s(t) = a + (b - a)t.$$

Sauf indication contraire, nous serons toujours par la suite dans des situations où, comme ici, les intégrales de contour convergent absolument. En effet, puisque $\mathbf{A}(\mathbf{x}(s))$ est continu pour $s \in [0, 1]$, le module de $\mathbf{A}(\mathbf{x}(s))$ est borné,

$$|\mathbf{A}(\mathbf{x})| = \sqrt{A_1^2(\mathbf{x}) + A_2^2(\mathbf{x})} < M.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} |I_C| &\leq \int_0^1 \left| \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| ds \leq \int_0^1 |\mathbf{A}(\mathbf{x})| \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| ds \\ &\leq ML(C), \end{aligned} \tag{1.4}$$

où $L(C)$ est la longueur (finie) de la courbe (Éq.(1.1)).

1.3 Propriétés des champs de gradient

Champs de gradient. Nous considérons un champ de vecteurs

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \{A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{x})\}$$

continus dans un domaine ouvert simplement connexe D et tel qu'en tout point de D , $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ peut être exprimé comme le gradient d'une fonction *continûment différentiable* $\Lambda(\mathbf{x})$,

$$A_\mu(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}, \quad \mu = 1, 2. \tag{1.5}$$

Nous pouvons aussi noter cette relation de façon vectorielle

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla \Lambda(\mathbf{x}), \tag{1.6}$$

où ∇ est l'opérateur gradient $(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$. L'intégrale de contour (1.2) devient alors

$$I_C = \int_0^1 ds \sum_{\mu=1}^2 \frac{\partial \Lambda(\mathbf{x}(s))}{\partial x_\mu} \frac{dx_\mu}{ds} = \int_0^1 ds \frac{d\Lambda(\mathbf{x}(s))}{ds} = \Lambda(\mathbf{x}(1)) - \Lambda(\mathbf{x}(0)),$$

où nous avons utilisé la propriété de dérivées en chaîne.

Conclusion. Quand le vecteur \mathbf{A} est le gradient d'une fonction Λ continûment différentiable, l'intégrale ne dépend pas du contour mais uniquement des valeurs

de Λ aux points origine et extrémité du contour. Dans le cas d'un *chemin fermé*, l'intégrale donc s'annule.

Corrolaire. Si dans un domaine ouvert, des chemins fermés existent sur lesquels l'intégrale ne s'annule pas, le domaine n'est pas simplement connexe.

Convention. Par la suite les chemins fermés seront toujours orientés dans le sens des arguments croissants.

Réciproque. Nous avons montré que l'intégrale d'un vecteur gradient sur un chemin fermé est nulle. Réciproquement, montrons que si, pour tout chemin fermé de D l'intégrale de contour (1.3) s'annule, le champ de vecteurs est un champ de gradients.

Choisissons un point fixe arbitraire \mathbf{y} de D (changer ce point change $\Lambda(\mathbf{x})$ par une constante) et définissons la fonction $\Lambda(\mathbf{x})$ par l'intégrale de contour

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds \mathbf{A}(\xi(s)) \cdot \frac{d\xi(s)}{ds}, \quad (1.7)$$

avec $\xi(0) = \mathbf{y}$, $\xi(1) = \mathbf{x}$ et C est un contour quelconque joignant \mathbf{y} à \mathbf{x} . Puisque la différence entre les intégrales correspondant à deux chemins différents joignant \mathbf{y} à \mathbf{x} correspond à un chemin fermé, elle s'annule, et donc $\Lambda(\mathbf{x})$ ne dépend pas du contour choisi. Calculons alors $\Lambda(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \Lambda(\mathbf{x})$ dans la limite où $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$. Pour $|\mathbf{h}|$ suffisamment petit, le segment de droite qui joint $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ à \mathbf{x} appartient à D . On peut donc choisir de joindre \mathbf{y} à $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ en allant de \mathbf{y} à \mathbf{x} puis de \mathbf{x} à $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ par le segment de droite $\xi(s) = s(\mathbf{x} + \mathbf{h}) + (1 - s)\mathbf{x}$, $s \in [0, 1]$. Alors $d\xi/ds = \mathbf{h}$ et

$$\Lambda(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \Lambda(\mathbf{x}) = \int_0^1 ds \mathbf{A}(\xi(s)) \cdot \mathbf{h}.$$

Comme $\mathbf{A}(\xi)$ est continu et $|\xi(s) - \mathbf{x}| < |\mathbf{h}|$,

$$|\mathbf{A}(\xi(s)) - \mathbf{A}(\mathbf{x})| < \varepsilon(|\mathbf{h}|),$$

où $\varepsilon(|\mathbf{h}|)$ tend vers zéro avec $|\mathbf{h}|$. Nous en déduisons

$$\Lambda(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \Lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|).$$

(La notation $o(x)$ a été définie dans la section 1.1.1.) La fonction $\Lambda(\mathbf{x})$ est donc continûment différentiable, et

$$A_\mu(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_\mu}, \quad \text{pour } \mu = 1, 2.$$

Conclusion : dans un domaine ouvert simplement connexe, une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale d'un champ de vecteurs s'annule sur tout contour fermé est que le champ de vecteurs soit un champ de gradient.

Notation. Dans \mathbb{R}^d , l'espace à d dimensions, (et donc dans \mathbb{R}^2), nous utiliserons souvent par la suite la notation simplifiée

$$\partial_\mu X \equiv \frac{\partial X}{\partial x_\mu}, \quad \text{pour } x_\mu \in \mathbb{R}^d. \quad (1.8)$$

Cette notation s'étendra aussi à des vecteurs et variables complexes.

G

gaussienne, moments de la distribution, 69.
 Green–Riemann, identité de, 7, 8.
 groupe de renormalisation, 161.
 groupe $SL(2, R)$, 121.

I

identité de Green–Riemann, 10.
 intégrale de contour, 2, 3, 4.
 invariance de jauge, 16.
 invariance par rotation, 4.

J

jacobien, 9.

L

Lagrange, formule de, 59.
 lagrangien, 15.
 laplacien, 25.
 Laurent, série de, 52.
 lemme de Goursat, 167.
 lemme de Szegö, 94.

M

matrices

de Stieljes, 134,
 approximants de Padé, 137.
 fractions continues, 136.
 et approximants de Padé, 134.

méthode

des résidus, 46.
 du col, 81.
 d'intégration, 139.
 du col complexe, 81.
 du col réelle, 80.
 ODM, 163.

Morera, théorème de, 31.
 multivaluée, 56.

N

Neville, table de, 146.
 non-commutativité, 119.

O

opérateur gradient, 5.
 order-dependent mapping, 163.
 ouvert simplement connexe, 22, 23.

P

Phragmén–Lindelöf, principe de, 77, 168.
 Picard, théorèmes de, 51.
 plan coupé, 55.
 points de branchement, 56.
 polynômes
 de Laguerre, 142.
 de Legendre, 132, 144.
 orthogonaux, 130.
 prolongement analytique, 31.
 propriété de Hergloiz, 121.

Q

quadrature gaussienne, 131.

R

racines complexes, 150.
 relation de dispersion, 85.
 représentation de Cauchy, 29.
 résidu, formule du, 46.
 Riccati, équation de, 100.
 Riccati, équation discrète de, 154.
 Riemann, surface de, 56.

S

Schwarz, lemme de, 34.
 série asymptotique, 157.
 série de Taylor, convergence, 38.
 singularité essentielle, 50.
 singularités confluentes, 149, 150.
 sphère de Riemann, 48.
 Stieljes, fonction de, 125.
 Stirling, formule de, 67, 79, 83.
 suites de fonctions analytiques, 37.
 Szegö, lemme de, 94.

T

théorème

de Carlson, 65, 167.
 de Liouville, 33.
 de Morera, 31.
 des deux cercles, 58.
 du module maximum, 33.

transformation

affine, 60.
 conforme, 26, 59, 159.
 de Borel, 79, 87.
 homographique, 60.

V

variable complexe : définition, 21.
vecteur gradient, 6.
vecteur : rotationnel, 7.
vortex, 19.

W

Wick, théorème de, 70
Wynn, identité de, 115, 174.

Z

zéros d'une fonction analytique, calcul, 42.